۱۵ / آذر ۹۸ دهم ریاضی پاسخنامه

ریاضی (۱) - عادی

۵۱- (رحیم مشتاق‌نظم)

بنابراین:

$A \cap B = (0,2)$

$A-(A\cap B)=[-3,0]$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲ تا ۵ کتاب درسی)

۵۲- (حمید علیزاده)

گزینهٔ «۱»: $0<a<1 \xrightarrow{a=\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^5 > (\frac{1}{2})^3$ نادرست است.

گزینهٔ «۲»: $-1<a<0 \xrightarrow{a=\frac{-1}{2}} (-\frac{1}{2})^6 > (-\frac{1}{2})^2$ نادرست است.

گزینهٔ «۳»: $a<-1$ یا $a>1 \xrightarrow{a=-2} (-2)^5 > (-2)^4$ نادرست است.

دقت شود که رابطهٔ $a^5>a^4$ فقط برای $a>1$ برقرار است.

گزینهٔ «۴»: $a<-1 \Rightarrow a^6 > a^4$ درست است.

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳ کتاب درسی)

۵۳- (مهسا زمانی)

$a_1=5 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4=135=a_1q^3$

$\frac{a_4}{a_1}=\frac{135}{5}=q^3 \Rightarrow q^3=27 \Rightarrow q=3$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷ کتاب درسی)

۵۴- (احسان لعل)

می‌دانیم $\sqrt{3}\simeq 1/7$ است پس:

$3\sqrt{3}\simeq 3\times 1/7=5/1 \Rightarrow 3-5/1=-2/1$

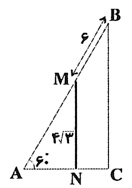
این عدد بین دو عدد صحیح متوالی ۳- و ۲- قرار دارد. پس:

$-3<-2/1<-2 \Rightarrow a=-3, b=-2 \Rightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ b^2=4 \end{cases}$

که بین دو عدد صحیح ۹ و ۴، چهار عدد صحیح وجود دارد.

(توان‌های گویا و عبارت‌های جبری، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳ کتاب درسی)

۵۵- (حمید علیزاده)



$\Delta AMN \begin{cases} \sin 60^\circ = \frac{MN}{AM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{AM} \Rightarrow AM=8 \\ \tan 60^\circ = \frac{MN}{AN} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{AN} \Rightarrow AN=4 \end{cases}$

$\Delta ABC: \cos 60^\circ = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{AC}{6+8}$

$\Rightarrow AC=7 \Rightarrow NC=7-4=3$

(مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی)

۵۶- (علی ارجمند)

A: فوتبال و $n(A)=50$

B: والیبال و $n(B)=30$

$\begin{cases} n((A\cup B)')=20 \\ n(U)=90 \end{cases}$

$\Rightarrow n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)')=90-20=70$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\Rightarrow 70=50+30-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=10$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=50-10=40$

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=30-10=20$

$\Rightarrow n(A-B)+n(B-A)=20+40=60$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۸ تا ۱۳ کتاب درسی)

۵۷- (زهرا ممتازی)

در مثلث قائم‌الزاویه ABD:

$\tan 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow AB=5$

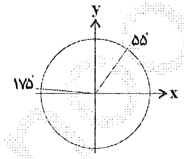
در مثلث قائم‌الزاویه ADC:

$\tan\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{15} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

(مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی)

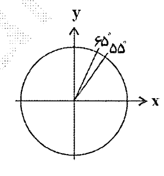
۵۸- (حمید علیزاده)

گزینهٔ «۱»:



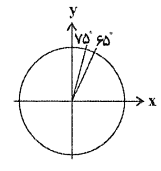
$\sin 55^\circ > \sin 175^\circ$

گزینهٔ «۲»:



$\cos 55^\circ > \cos 65^\circ$

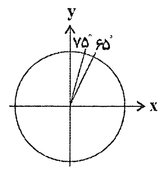
گزینهٔ «۳»:



$\sin 75^\circ > \sin 65^\circ \; , \; \cos 65^\circ > \cos 75^\circ$

$\Rightarrow \tan 75^\circ > \tan 65^\circ$

گزینهٔ «۴»:



$\sin 75^\circ > \sin 65^\circ \; , \; \cos 65^\circ > \cos 75^\circ$

$\Rightarrow \cot 65^\circ > \cot 75^\circ$

(مثلثات، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹ کتاب درسی)

۵۹- (علی ارجمند)

با توجه به شکل می‌توان متوجه شد که در شکل nام تعداد مربع‌ها به‌صورت زیر است:

$1+2\times(3+5+\dots+(2n-1))$

$=2\times(1+3+5+\dots+(2n-1))-1$

$=2\times(\frac{2n(2n+1)}{2}-2\times\frac{n(n+1)}{2})-1$

$=2n(2n+1-n-1)-1=2n^2-1$

$\Rightarrow$ تعداد مربع‌ها در شکل دهم $=1+2\times(3+5+7+9+11+13+15+17+19)$

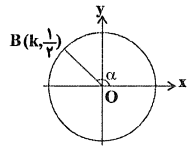
$\Rightarrow$ تعداد مربع‌ها در شکل دهم $=2\times 10^2-1=199$

توجه کنید که برای محاسبهٔ مجموع اعداد فرد کافی است مجموع اعداد زوج ۲ تا $2n$ را از مجموع اعداد ۱ تا $2n$ کم کنیم و همانطور که می‌دانید حاصل جمع اعداد از ۱ تا n برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$.

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰ کتاب درسی)

۶۰- (امین نصراله)

نقطهٔ $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, m)$ در ربع اول یا چهارم دایره مثلثاتی قرار دارد. اگر در ربع اول باشد پس از 180° دوران در ربع سوم قرار می‌گیرد و اگر در ربع چهارم باشد پس از 180° دوران در ربع دوم قرار می‌گیرد. پس از دوران به نقطهٔ $B(k,\frac{1}{2})$ رسیده‌ایم و $\frac{1}{2}>0$ است بنابراین نقطهٔ B در ربع اول یا دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. در نتیجه نقطهٔ A در ربع چهارم قرار دارد.



$\Rightarrow (\frac{1}{2})^2+k^2=1$

$\xrightarrow{k<0} k=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(مثلثات، صفحه‌های ۳۶ تا ۴۱ کتاب درسی)

۶۱- (محمد بحیرایی)

$\frac{t_8}{t_2}=9 \Rightarrow \frac{t_1+7d}{t_1+d}=9 \Rightarrow t_1+7d=9t_1+9d$

$\Rightarrow 8t_1=-2d \Rightarrow t_1=-\frac{1}{4}d$

$t_4=11 \Rightarrow t_1+3d=11 \xrightarrow{t_1=-\frac{d}{4}} -\frac{d}{4}+3d=11$

$\Rightarrow -d+12d=44 \Rightarrow 11d=44 \Rightarrow d=4$

$t_1=-\frac{d}{4} \xrightarrow{d=4} t_1=-1$

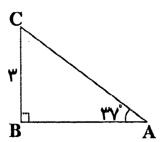
$t_n=t_1+(n-1)d \Rightarrow t_n=-1+(n-1)\times 4$

$\Rightarrow t_n=4n-5 \Rightarrow 103=4n-5 \Rightarrow 4n=108 \Rightarrow n=27$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۳ کتاب درسی)

۶۲- (فرشاد فرامرزی)

ابتدا محیط مثلث ABC را به دست می‌آوریم:



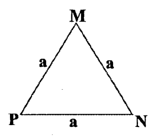
$\sin 37^\circ = \frac{BC}{AC}$

$\Rightarrow 0/6 = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC=5$

$AB^2+3^2=5^2 \Rightarrow AB=4$

$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\ \text{محیط} = 3+4+5=12$

از آن‌جا که محیط مثلث متساوی‌الاضلاع MNP با محیط مثلث ABC برابر است، داریم:



$3a=12 \Rightarrow a=4$

$\Rightarrow S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(4^2)$

$\Rightarrow S=4\sqrt{3}$

(مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی)

۶۳- (مجتبی مجاهدی)

از آن‌جایی که $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$، بنابراین داریم: $\sin x=\cos x.\tan x$.

پس می‌توان نوشت:

$\sin x+\tan x=\cos x.\tan x+\tan x=(\cos x+1)\times \tan x$

چون $\sin x+\tan x$ طبق فرض سؤال مثبت است پس:

$(\cos x+1)\times \tan x>0 \xrightarrow{-1\le \cos x\le 1}$

$\underbrace{(\cos x+1)}_{\text{نامنفی}}\times \tan x>0 \Rightarrow \tan x>0$

$\Rightarrow$ (۱) انتهای کمان x در ربع اول یا سوم است.

$\frac{1}{\cos x}-\sin x\times \tan x=\frac{1}{\cos x}-\sin x\times\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}<0$

از طرفی $1-\sin^2 x=\cos^2 x$ پس:

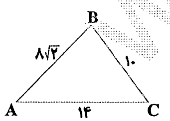
$\frac{\cos^2 x}{\cos x}<0 \Rightarrow \cos x<0 \Rightarrow$ (۲) انتهای کمان x در ربع دوم یا سوم است.

با توجه به اشتراک (۱) و (۲)، انتهای کمان x در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

(مثلثات، صفحه‌های ۳۶ تا ۴۶ کتاب درسی)

۶۴- (حمیدرضا صاحبی)

کوچک‌ترین زاویه مثلث، روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع مثلث است، بنابراین داریم:



$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}AB\times AC\times \sin\hat{A}$

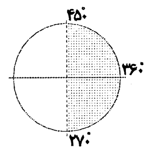
$56=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{2}\times 14\times \sin\hat{A}$

$\Rightarrow \sin\hat{A}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\xrightarrow[\text{زاویهٔ مثلث است}]{\hat{A}\ \text{کوچک‌ترین}} \hat{A}=45^\circ$

(مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی)

۶۵- (سوند ولی‌زاده)



$0<\cos\alpha\le 1$

$\Rightarrow 0<\frac{-2m+3}{2}\le 1 \xrightarrow{\times 2}$

$0<-2m+3\le 2$

$\xrightarrow{-3} -3<-2m\le -1 \xrightarrow{\div(-2)}$

$\frac{1}{2}\le m<\frac{3}{2}$

(مثلثات، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹ کتاب درسی)

۶۶- (مهدی خیرالامور)

از آن‌جایی که جملهٔ چهارم $\frac{9}{4}$ جملهٔ دوم می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که:

$\frac{a_4}{a_2}=\frac{a_1\times q^3}{a_1\times q}=q^2=\frac{9}{4}\Rightarrow q=\pm\frac{3}{2}\xrightarrow{\text{قدرنسبت}\ >0} q=\frac{3}{2}$

$a_1+a_2+a_3+a_4=130$

$\Rightarrow a_1+\frac{3}{2}a_1+\frac{9}{4}a_1+\frac{27}{8}a_1=130$

$\Rightarrow (\frac{8+12+18+27}{8})a_1=130 \Rightarrow \frac{65}{8}a_1=130 \Rightarrow a_1=16$

$a_6=a_1\times q^5=16\times(\frac{3}{2})^5=\frac{243}{2}=121/5$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷ کتاب درسی)

۶۷- (امیر معموریان)

$\sin x-\cos x=m$

$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}-2\sin x\cos x=m^2$

$\Rightarrow 1-2\sin x\cos x=m^2 \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-m^2}{2}$

$\sqrt{\tan x+\cot x}=\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}}=\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\sin x}}$

$=\sqrt{\frac{1}{\frac{1-m^2}{2}}}=\sqrt{\frac{2}{1-m^2}}$

(مثلثات، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶ کتاب درسی)

۶۸- (رضا ذاکر)

عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$\frac{1+\tan x}{1+\cot x}=\frac{1+\tan x}{1+\frac{1}{\tan x}}=\frac{1+\tan x}{\frac{1+\tan x}{\tan x}}=\tan x=\sqrt{3}$

داریم:

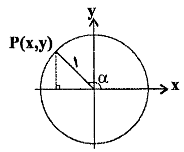
$\frac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}=\frac{\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{2\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{2\cos x}{\cos x}}=\frac{1-2\tan x}{\tan x+2}$

$=\frac{1-2(\sqrt{3})}{\sqrt{3}+2}$

(مثلثات، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶ کتاب درسی)

۶۹- (فرشاد فرامرزی)

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل داریم:



$\sin\alpha=y=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow (\frac{2}{\sqrt{5}})^2+x^2=1$

$\Rightarrow x^2=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

$\xrightarrow[x<0]{\alpha\ \text{در ربع دوم}} x=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}}=-2$

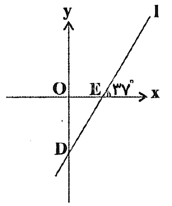
بنابراین شیب خط برابر ۲- و عرض از مبدأ آن ۱ است و داریم: $y=-2x+1$

که تنها مختصات نقطهٔ داده شده در گزینهٔ «۳» در این معادله صدق می‌کند.

(مثلثات، صفحه‌های ۳۶ تا ۴۶ کتاب درسی)

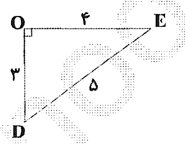
-۷۰ (مهسا زمانی)

$$\text{شیب خط } l = \tan 37^\circ = \frac{1}{\cot 37^\circ} = \frac{3}{4}$$



$$\text{معادلهٔ خط } l: y - 3 = \frac{3}{4}(x - 8)$$

$$\Rightarrow l: 3x - 4y - 12 = 0$$



$$x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow D\Big|_{-3}^{0}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow E\Big|_{0}^{4}$$

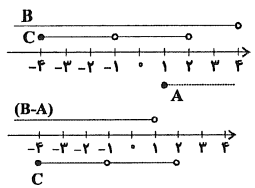
$$\text{محیط مثلث } \overset{\Delta}{ODE} = 3 + 4 + 5 = 12$$

(مثلثات، صفحه‌های ۴۰ و ۴۱ کتاب درسی)

ریاضی (۱) - موازی

-۷۱ (عاطفه خان‌محمدی)

مجموعه‌ها را روی محور اعداد نمایش می‌دهیم:



$$B - A = (-\infty, 1)$$

$$(B - A) \cup C = (-\infty, 2)$$

مجموعهٔ مورد نظر شامل عدد طبیعی $\{1\}$ است.

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲ تا ۵ کتاب درسی)

-۷۲ (رحیم مشتاق‌نظم)

$$A \cap B = (0, 2)$$

بنابراین:

$$A - (A \cap B) = [-3, 0]$$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲ تا ۵ کتاب درسی)

-۷۳ (مجتبی مجاهدی)

ابتدا جملهٔ عمومی دنباله را به‌دست می‌آوریم. توجه شود که:

$$\text{جملهٔ اول} = 2 = \boxed{1} \times 2$$
$$\text{جملهٔ دوم} = 6 = \boxed{2} \times 3$$
$$\text{جملهٔ سوم} = 12 = \boxed{3} \times 4$$
$$\text{جملهٔ چهارم} = 20 = \boxed{4} \times 5$$

$$\Rightarrow \text{جملهٔ } n\text{ام دنباله} = n \times (n + 1)$$

بنابراین جمله ۱۲۲ام برابر است با:

$$n = 122 \Rightarrow 122 \times (122 + 1) = 122 \times 123 = 15006$$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۱۶ تا ۲۰ کتاب درسی)

-۷۴ (سهند ولی‌زاده)

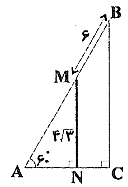
$$\frac{4(\frac{1}{2})^4 - 4(\frac{\sqrt{3}}{2})^4}{\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}} = \cot x \Rightarrow \frac{4(\frac{1}{16}) - 4(\frac{9}{16})}{\frac{-2\sqrt{3}}{3}} = \cot x$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{4} - \frac{9}{4}}{\frac{-2\sqrt{3}}{3}} = \cot x \Rightarrow \frac{-2}{\frac{-2\sqrt{3}}{3}} = \cot x \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{3}} = \cot x$$

$$\Rightarrow \cot x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 30^\circ$$

(مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی)

-۷۵ (حمید علیزاده)



$$\Delta AMN \begin{cases} \sin 60^\circ = \dfrac{MN}{AM} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{AM} \Rightarrow AM = 8 \\ \tan 60^\circ = \dfrac{MN}{AN} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{AN} \Rightarrow AN = 4 \end{cases}$$

$$\Delta ABC: \cos 60^\circ = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{6 + 8}$$

$$\Rightarrow AC = 7 \Rightarrow NC = 7 - 4 = 3$$

(مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی)

-۷۶ (علی ارجمند)

A: فوتبال و $n(A) = 50$

B: والیبال و $n(B) = 30$

$$\begin{cases} n((A \cup B)') = 20 \\ n(U) = 90 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)') = 90 - 20 = 70$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 70 = 50 + 30 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 10$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 50 - 10 = 40$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 30 - 10 = 20$$

$$\Rightarrow n(A - B) + n(B - A) = 20 + 40 = 60$$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۸ تا ۱۳ کتاب درسی)

-۷۷ (حمید علیزاده)

$$a, \underbrace{\ldots}_{\text{۷ واسطه هندسی}}, b$$

$$\text{جملهٔ سوم} = \text{دومین واسطهٔ هندسی} \Rightarrow a_3 = 2 \Rightarrow aq^2 = 2$$

$$\text{جملهٔ هفتم} = \text{ششمین واسطهٔ هندسی} \Rightarrow a_7 = 32 \Rightarrow aq^6 = 32$$

$$\Rightarrow \frac{aq^6}{aq^2} = \frac{32}{2}$$

$$\Rightarrow q^4 = 16 = (\pm 2)^4 \xrightarrow{\text{جملات مثبت هستند } (q>0)} q = 2$$

$$aq^2 = 2 \xrightarrow{q=2} a(4) = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = aq^3 = \frac{1}{2}(2)^3 = 4$$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷ کتاب درسی)

-۷۸ (حمید علیزاده)

چون جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی باید درجه یک باشد، بنابراین باید ضریب جملهٔ n^2 در مخرج صفر شود، پس:

$$k + 2 = 0 \Rightarrow k = -2$$

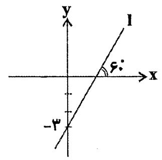
$$a_n = \frac{2kn + 18}{(k + 2)n^2 + k - 1}$$

$$\xrightarrow{k=-2} a_n = \frac{-4n + 18}{-3} = \frac{4}{3}n - 6 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{4n}{3} < 6 \Rightarrow n < \frac{18}{4} \Rightarrow n < 4/5 \Rightarrow n = \{1, 2, 3, 4\}$$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴ کتاب درسی)

۷۹- (رضا ذاکر)



$m =$ شیب خط

$h =$ عرض از مبدأ خط

$$y = mx + h$$
$$y = (\tan 60^\circ)x - 3$$
$$y = \sqrt{3}x - 3$$

و از بین چهار نقطهٔ داده شده در گزینه‌ها فقط نقطهٔ $(3, 3\sqrt{3})$ در معادلهٔ خط l صدق نمی‌کند.

(مثلثات، صفحه‌های ۳۶ تا ۴۱ کتاب درسی)

۸۰- (زهرا ممتازی)

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD:

$$\tan 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow AB = 5$$

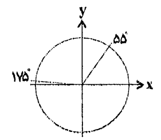
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC:

$$\tan\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{15} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

(مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی)

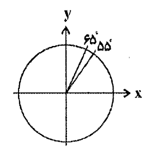
۸۱- (حمید علیزاده)

گزینهٔ «۱»:



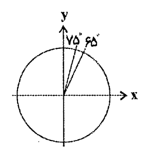
$$\sin 55^\circ > \sin 175^\circ$$

گزینهٔ «۲»:



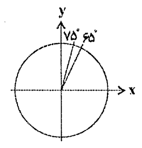
$$\cos 55^\circ > \cos 65^\circ$$

گزینهٔ «۳»:



$$\sin 75^\circ > \sin 65^\circ \ , \ \cos 65^\circ > \cos 75^\circ \Rightarrow \tan 75^\circ > \tan 65^\circ$$

گزینهٔ «۴»:



$$\sin 75^\circ > \sin 65^\circ \ , \ \cos 65^\circ > \cos 75^\circ \Rightarrow \cot 65^\circ > \cot 75^\circ$$

(مثلثات، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹ کتاب درسی)

۸۲- (علی ارجمند)

با توجه به شکل می‌توان متوجه شد که در شکل nام تعداد مربع‌ها به‌صورت زیر است:

$$1 + 2\times(3 + 5 + \dots + (2n-1))$$
$$= 2\times(1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)) - 1$$
$$= 2\times\left(\frac{2n(2n+1)}{2} - 2\times\frac{n(n+1)}{2}\right) - 1$$
$$= 2n(2n+1-n-1) - 1 = 2n^2 - 1$$

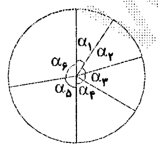
$\Rightarrow$ تعداد مربع‌ها در شکل دهم $= 1 + 2\times(3+5+7+9+11+13+15+17+19)$

$\Rightarrow$ تعداد مربع‌ها در شکل دهم $= 2\times 10^2 - 1 = 199$

توجه کنید که برای محاسبهٔ مجموع اعداد فرد کافی است مجموع اعداد زوج ۲ تا ۲n را از مجموع اعداد ۱ تا ۲n کم کنیم و همانطور که می‌دانید حاصل جمع اعداد از ۱ تا n برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$.

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰ کتاب درسی)

۸۳- (حمید زرین‌کفش)



$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 360^\circ$$

اگر قدرنسبت دنباله را d در نظر بگیریم، داریم:

$$\alpha_1 + \alpha_1 + d + \alpha_1 + 2d + \alpha_1 + 3d + \alpha_1 + 4d + \alpha_1 + 5d = 360^\circ$$
$$\Rightarrow 6\alpha_1 + 15d = 360^\circ$$
$$2\alpha_1 + 5d = 120^\circ \qquad (*)$$

از طرفی اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه 40° می‌باشد، داریم:

$$\alpha_1 + 5d - \alpha_1 = 40^\circ \Rightarrow 5d = 40^\circ \Rightarrow d = 8^\circ$$
$$\xrightarrow{(*)} 2\alpha_1 + 5\times 8 = 120^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 40^\circ$$

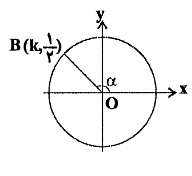
بزرگ‌ترین کمان برابر است با:

$$\alpha_1 + 5d = 40 + 5\times 8 = 80^\circ$$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴ کتاب درسی)

۸۴- (امین نصرات)

نقطهٔ $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, m)$ در ربع اول یا چهارم دایره مثلثاتی قرار دارد. اگر در ربع اول باشد پس از 180° دوران در ربع سوم قرار می‌گیرد و اگر در ربع چهارم باشد پس از 180° دوران در ربع دوم قرار می‌گیرد. پس از دوران به نقطهٔ $B(k, \frac{1}{2})$ رسیده‌ایم و $\frac{1}{2} > 0$ است بنابراین نقطهٔ B در ربع اول یا دوم دایره مثلثاتی قرار دارد. در نتیجه نقطهٔ A در ربع چهارم قرار دارد.



$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + k^2 = 1$$
$$\xrightarrow{k<0} k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

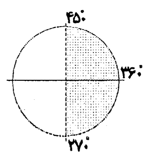
(مثلثات، صفحه‌های ۳۶ تا ۴۱ کتاب درسی)

۸۵- (محمد بحیرایی)

$$\frac{t_8}{t_2} = 9 \Rightarrow \frac{t_1 + 7d}{t_1 + d} = 9 \Rightarrow t_1 + 7d = 9t_1 + 9d$$
$$\Rightarrow 8t_1 = -2d \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{4}d$$
$$t_4 = 11 \Rightarrow t_1 + 3d = 11 \xrightarrow{t_1 = -\frac{d}{4}} -\frac{d}{4} + 3d = 11$$
$$\Rightarrow -d + 12d = 44 \Rightarrow 11d = 44 \Rightarrow d = 4$$
$$t_1 = -\frac{d}{4} \xrightarrow{d=4} t_1 = -1$$
$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = -1 + (n-1)\times 4$$
$$\Rightarrow t_n = 4n - 5 \Rightarrow 103 = 4n - 5 \Rightarrow 4n = 108 \Rightarrow n = 27$$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴ کتاب درسی)

۸۶- (سهند ولی‌زاده)



$$0 < \cos\alpha \le 1$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{-2m+3}{2} \le 1 \xrightarrow{\times 2}$$
$$0 < -2m + 3 \le 2$$
$$\xrightarrow{-3} -3 < -2m \le -1 \xrightarrow{\div(-2)}$$
$$\frac{1}{2} \le m < \frac{3}{2}$$

(مثلثات، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹ کتاب درسی)

۸۷- (مهدی فیرالامور)

از آن‌جایی که جملهٔ چهارم $\frac{9}{4}$ جملهٔ دوم می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 \times q^3}{a_1 \times q} = q^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow q = \pm\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{قدرنسبت} > 0} q = \frac{3}{2}$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 130$$
$$\Rightarrow a_1 + \frac{3}{2}a_1 + \frac{9}{4}a_1 + \frac{27}{8}a_1 = 130$$

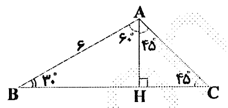
$$\Rightarrow (\frac{۸+۱۲+۱۸+۲۷}{۸})a_۱ = ۱۳۰ \Rightarrow \frac{۶۵}{۸}a_۱ = ۱۳۰ \Rightarrow a_۱ = ۱۶$$

$$a_۶ = a_۱ \times q^۵ = ۱۶ \times (\frac{۳}{۲})^۵ = \frac{۲۴۳}{۲} = ۱۲۱/۵$$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷ کتاب درسی)

۸۸- (رضا ذاکر)

با رسم ارتفاع AH داریم:



$$HC = HA = ۶\sin ۳۰^\circ = ۶(\frac{۱}{۲}) = ۳$$

$$BH^۲ = AB^۲ - AH^۲ = ۶^۲ - ۳^۲ = ۲۷$$

$$\Rightarrow BH = ۳\sqrt{۳}$$

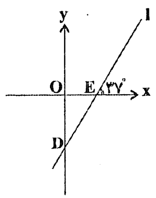
$$BC = BH + HC = ۳\sqrt{۳} + ۳ = ۳(\sqrt{۳}+۱)$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AH \times BC = \frac{۱}{۲}(۳)(۳)(\sqrt{۳}+۱)$$

$$= \frac{۹}{۲}(\sqrt{۳}+۱) = ۴/۵(\sqrt{۳}+۱)$$

(مثلثات، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی)

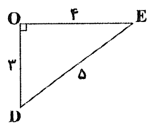
۸۹- (مهسا زمانی)



$$l \text{ شیب‌خط } = \tan ۳۷^\circ = \frac{۱}{\cot ۳۷^\circ} = \frac{۳}{۴}$$

$$l \text{ معادلهٔ خط } : y - ۳ = \frac{۳}{۴}(x-۸)$$

$$\Rightarrow l : ۳x - ۴y - ۱۲ = ۰$$



$$x = ۰ \Rightarrow y = -۳ \Rightarrow D\Big|_{-۳}^{۰}$$

$$y = ۰ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow E\Big|_{۰}^{۴}$$

$$\overset{\Delta}{ODE} \text{ محیط مثلث } = ۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$$

(مثلثات، صفحه‌های ۳۰ و ۳۱ کتاب درسی)

۹۰- (زهرا معتازی)

طبق فرمول تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) + n(A \cap B) = n(A) + n(B)$$

$$\Rightarrow n(A) + n(B) = ۱۶ \quad (۱)$$

از طرفی طبق فرض داریم:

$$n(A') + n(B') = ۱۸ \quad (۲)$$

از جمع (۱) و (۲) داریم:

$$n(A) + n(A') + n(B) + n(B') = ۳۴$$

نکته: اگر $A \subseteq U$ باشد، $n(A) + n(A') = n(U)$ پس خواهیم داشت:

$$n(A) + n(A') + n(B) + n(B') = ۳۴$$

$$\Rightarrow n(U) + n(U) = ۳۴ \Rightarrow n(U) = ۱۷$$

حال مقدار $n(A)$ را پیدا می‌کنیم:

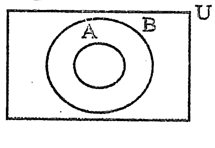
$$n(A) = n(U) - n(A') = ۱۷ - ۸ = ۹$$

(مجموعه، الگو و دنباله، صفحه‌های ۸ تا ۱۳ کتاب درسی)

پاسخنامه ۱۵/آذر/۹۸ دهم تجربی

ریاضی (۱) - عادی

-۵۱ «حسن نصرتی ناهوک» گزینه ۲



$A\subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A\cap B = A \\ A\cup B = B\end{cases}$

$\begin{cases} A\subseteq B \\ A \ \text{نامتناهی}\end{cases} \Rightarrow B$ نامتناهی

الف) $A-B = A-(A\cap B) = A-A = \varnothing$: متناهی

ب) $A\subseteq B \Rightarrow A\cup B = B$: نامتناهی

پ) $B\cap A' = B-A$: متناهی یا نامتناهی

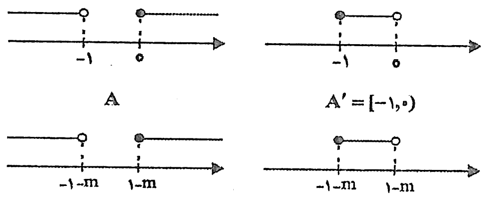
ت) $(A\cup B)' = (B)' = B'$: متناهی یا نامتناهی

پس فقط یکی از مجموعه‌های داده شده قطعاً نامتناهی است.

(صفحه‌های ۵ تا ۱۰ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

-۵۲ «مهرداد قابی» گزینه ۱

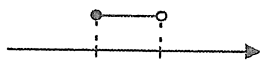
ابتدا به کمک نمایش هندسی مجموعه‌های A و B، متمم این دو مجموعه را به‌دست می‌آوریم:



A $A'=[-1,0)$

B $B'=[-1-m,1-m)$

از آن‌جایی که $A'\cap B' = [-1,0)$، بازهٔ A' زیرمجموعه بازهٔ B' است. یعنی:



$-1-m\le -1 \qquad 0\le 1-m$

$\begin{cases}-1-m\le -1\\ 1-m\ge 0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}0\le m\\ m\le 1\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} 0\le m\le 1$

(صفحه‌های ۳ تا ۵ و ۸ تا ۱۳ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

-۵۳ «سهیل حسن‌خان‌پور» گزینه ۱

$\begin{cases} n(A\cup B) = n(U) = 9-(-8)+1 = 18 \\ n(A) = 12 \\ n(A\cap B) = 1 \end{cases}$

$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\Rightarrow 18 = 12+n(B)-1 \Rightarrow n(B) = 7$

$n(B') = n(U)-n(B) = 18-7 = 11$

(صفحه‌های ۸ تا ۱۳ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

-۵۴ «کیمیا شیرزاد» گزینه ۲

در این کلاس، اگر A مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که در درس ریاضی قبول شده‌اند و B مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که در درس شیمی قبول شده‌اند، داریم:

$n(A\cap B) = 10$

فقط در یکی از دو درس قبول‌شده‌اند: $n(A)+n(B)-2n(A\cap B) = 20$

$n(A)+n(B)-2\times 10 = 20 \Rightarrow n(A)+n(B) = 40$

$\Rightarrow n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B) = 40-10 = 30$

درهیچ‌کدام از دو درس قبول نشده‌اند: $n(A'\cap B') = n((A\cup B)') = 30$

تعداد دانش‌آموزان کلاس: $n(U) = n(A\cup B)+n((A\cup B)')$

$\Rightarrow n(U) = 30+30 = 60$

(صفحه‌های ۸ تا ۱۳ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

-۵۵ «حسن نصرتی ناهوک» گزینه ۱

جملهٔ عمومی الگوی خطی به‌صورت $c_n = an+b$ است که اختلاف هر دو جملهٔ متوالی همان ضریب n در c_n است، پس:

$a=-4 \ , \ c_{11} = -29 \Rightarrow -4(11)+b = -29$

$\Rightarrow b = -29+44 = 15 \Rightarrow c_n = -4n+15$

$c_n = -65 \Rightarrow -4n = -65-15 = -80 \Rightarrow n = 20$

(صفحه‌های ۱۶ و ۱۷ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

-۵۶ «کیمیا شیرزاد» گزینه ۲

تعداد دایره‌ها در هر مرحله برابر است با:

مرحلهٔ (۱): $1+2^2 \Rightarrow 1+(1+1)^2$

مرحلهٔ (۲): $2+3^2 \Rightarrow 2+(2+1)^2$

مرحلهٔ (۳): $3+4^2 \Rightarrow 3+(3+1)^2$

$\vdots$

مرحلهٔ (n): $n+(n+1)^2$

مرحلهٔ (۹): $9+(9+1)^2 = 109$

(صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

۵۷- «محمد بحیرایی»

اگر t_n جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی و d قدرنسبت دنباله باشد، داریم:

$$t_1+t_2+t_3=3 \Rightarrow t_1+t_1+d+t_1+2d=3$$

$$\Rightarrow 3t_1+3d=3 \Rightarrow t_1+d=1 \Rightarrow t_1=1-d \quad (*)$$

طبق فرض سؤال داریم:

$$t_4=2.5t_3 \Rightarrow t_1+3d=\frac{5}{2}(t_1+2d)$$

$$\Rightarrow t_1+3d=\frac{5}{2}t_1+5d$$

$$\xrightarrow{(*)} 1-d+3d=\frac{5}{2}(1-d)+5d \Rightarrow 1+2d=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}d+5d$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow d=-3 \xrightarrow{(*)} t_1=4$$

$$t_{10}=t_1+9d=4-27=-23$$

(صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

۵۸- «محمد بحیرایی»

$$\begin{cases} t_4=24 \Rightarrow t_1r^3=24 \\ t_7=192 \Rightarrow t_1r^6=192 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{t_7}{t_4}=\frac{t_1r^6}{t_1r^3}=\frac{192}{24} \Rightarrow r^3=8=2^3 \Rightarrow r=2$$

$$t_1r^3=24 \Rightarrow t_1\times 8=24 \Rightarrow t_1=3$$

$$t_n=t_1r^{n-1} \Rightarrow t_n=3\times 2^{n-1}$$

(صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

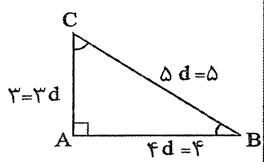
۵۹- «حسن نصرتی ناهوک»

اضلاع مثلث قائم‌الزاویه که تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند را به‌صورت $a+d$، a، $a-d$ در نظر می‌گیریم که با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$(a+d)^2=a^2+(a-d)^2 \Rightarrow a^2+2ad+d^2=a^2+a^2-2ad+d^2$$

$$\Rightarrow a^2-4ad=0 \Rightarrow a(a-4d)=0 \xrightarrow{a>0} a=4d$$

پس وقتی اضلاع مثلث ABC تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند که طول اضلاع آن از کوچک به بزرگ $3d$، $4d$، $5d$ باشند، پس:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}(3d)(4d)=6d^2=6$$

$$\Rightarrow d^2=1 \Rightarrow d=1$$

$$\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{5}, \cos B=\frac{AB}{BC}=\frac{4}{5}$$

$$\tan C=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{3}$$

$$\text{مقدار عبارت}=\frac{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}{\frac{4}{3}}=\frac{\frac{7}{5}}{\frac{4}{3}}=\frac{21}{20}$$

توجه کنید اگر در رسم شکل جای دو رأس B و C عوض شود، جواب دیگر سؤال برابر با $\frac{28}{15}$ به‌دست می‌آید که در گزینه‌ها نیست.

(صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴ و ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی) (ترکیبی)

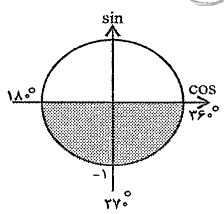
۶۰- «شکیب رجبی»

$$\frac{3\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cot 60^\circ \tan 30^\circ+\sin^2 45^\circ}=\frac{0}{\cot 60^\circ \tan 30^\circ+\sin^2 45^\circ}=0$$

$\Rightarrow \cot x=0 \Rightarrow$ با توجه به گزینه‌ها، x می‌تواند 90° باشد.

(صفحه‌های ۲۹ تا ۳۹ کتاب درسی) (مثلثات)

۶۱- «سوند ولی‌زاده»



توجه کنید که مطابق دایرهٔ مثلثاتی فوق وقتی α در محدودهٔ $180^\circ<\alpha<360^\circ$ تغییر می‌کند، تصویر نقاط روی دایرهٔ مثلثاتی بر روی محور yها که همان $\sin\alpha$ است در محدودهٔ $[-1,0)$ تغییر می‌کند، یعنی $-1\le\sin\alpha<0$ است.

$$\xrightarrow{180^\circ<\alpha<360^\circ} -1\le\sin\alpha<0 \Rightarrow -1\le-\frac{3m-2}{3}<0$$

$$\xrightarrow{\times 3} -3\le-3m+2<0 \xrightarrow{-2} -5\le-3m<-2 \Rightarrow \frac{2}{3}<m\le\frac{5}{3}$$

(صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹ کتاب درسی) (مثلثات)

۶۲- «شکیب رجبی»

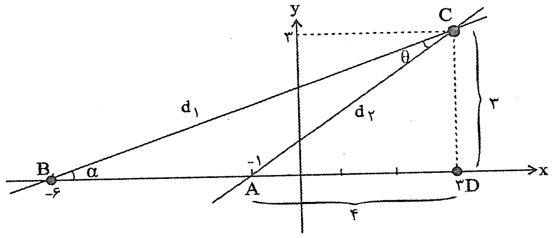
چون $\sin^2\alpha\ge 0$ و $\sin^2\alpha\cos\alpha<0$ است، پس $\cos\alpha$ منفی است. در نتیجه انتهای کمان α در ناحیهٔ دوم یا سوم مثلثاتی قرار دارد.

همچنین چون $\cos\alpha\tan\alpha<0$ است، یعنی $\cos\alpha$ و $\tan\alpha$ مختلف‌العلامت هستند، یعنی انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم یا چهارم مثلثاتی است. از اشتراک شرط‌های به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی است.

(صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹ کتاب درسی) (مثلثات)

۶۳- گزینه ۲

«وهاب نادری»



$$AC^۲ = AD^۲ + DC^۲$$

$$\Rightarrow AC^۲ = ۱۶ + ۹ \Rightarrow AC^۲ = ۲۵ \Rightarrow AC = ۵$$

$$AB = |-۶-(-۱)| = ۵$$

$AB = AC$ است، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \theta = \alpha \Rightarrow \tan\theta = \tan\alpha$$

شیب خط $d_۱$ برابر با $\tan\alpha$ است، پس $\tan\theta$ نیز برابر با شیب خط $d_۱$ است.

(صفحه‌های ۴۰ و ۴۱ کتاب درسی) (مثلثات)

۶۴- گزینه ۱

«سجاد راوطلب»

$$\frac{۱+\cos x}{\sin^۳ x} - \frac{۱}{\sin x(۱-\cos x)} = \frac{\overbrace{(۱+\cos x)(۱-\cos x)}^{\text{اتحاد مزدوج}} - \sin^۲ x}{\sin^۳ x(۱-\cos x)}$$

$$= \frac{(۱-\cos^۲ x) - \sin^۲ x}{\sin^۳ x(۱-\cos x)} = \frac{\sin^۲ x - \sin^۲ x}{\sin^۳ x(۱-\cos x)} = \frac{۰}{\sin^۳ x(۱-\cos x)} = ۰$$

(صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶ کتاب درسی) (مثلثات)

۶۵- گزینه ۳

«سجاد راوطلب»

با توجه به آن که $\tan x = ۲$ است، داریم:

$$\tan x = ۲ \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = ۲ \Rightarrow \sin x = ۲\cos x$$

حال در عبارت خواسته شده به جای $\sin x$ها، عبارت $۲\cos x$ را قرار می‌دهیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin^۳ x + \cos^۳ x}{\sin^۵ x + \cos^۵ x} \xlongequal{\sin x = ۲\cos x} \frac{(۲\cos x)^۳ + \cos^۳ x}{(۲\cos x)^۵ + \cos^۵ x}$$

$$= \frac{۸\cos^۳ x + \cos^۳ x}{۳۲\cos^۵ x + \cos^۵ x} = \frac{۹\cos^۳ x}{۳۳\cos^۵ x} = \frac{۳}{۱۱\cos^۲ x} \quad (*)$$

حال از رابطهٔ $۱+\tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$ استفاده می‌کنیم تا $\cos^۲ x$ به‌دست آید:

$$۱+\tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} \xlongequal{\tan x = ۲} ۱+۴ = \frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۱}{۵} \quad (**)$$

با جایگذاری $(**)$ در $(*)$ عبارت مورد نظر برابر می‌شود با:

$$\frac{۳}{۱۱\cos^۲ x} \xlongequal{(**)} \frac{۳}{۱۱\times(\frac{۱}{۵})} = \frac{۱۵}{۱۱}$$

(صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶ کتاب درسی) (مثلثات)

۶۶- گزینه ۲

«حسن نصرتی‌ناهوک»

$$(۱-\sin^۲\theta)(۲+\tan^۲\theta) = (\cos^۲\theta)(۱+۱+\tan^۲\theta)$$

$$= \cos^۲\theta(۱+\frac{۱}{\cos^۲\theta}) = \cos^۲\theta + \frac{\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \cos^۲\theta + ۱ = A^۲ + ۱$$

(صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶ کتاب درسی) (مثلثات)

۶۷- گزینه ۳

«مورداد قابی»

می‌دانیم:

$$\begin{cases} \frac{۱}{\sin^۲ x} = ۱+\cot^۲ x \\ \frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱+\tan^۲ x \end{cases} \Rightarrow A = (۱+\cot^۲ x) + (۱+\tan^۲ x)$$

$$= ۲+\cot^۲ x + \tan^۲ x \quad (۱)$$

همچنین

$$\begin{cases} \frac{۱}{\tan x} = \cot x \\ \frac{۱}{\cot x} = \tan x \end{cases} \Rightarrow B = \cot^۲ x + \tan^۲ x \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} A = B + ۲ \Rightarrow A - B = ۲$$

(صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶ کتاب درسی) (مثلثات)

۶۸- گزینه ۴

«مورداد قابی»

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»:

$$\text{طرف چپ}: \frac{\sin x}{۱+\cos x} = \frac{\sin x}{۱+\cos x} \times \frac{۱-\cos x}{۱-\cos x} = \frac{\sin x(۱-\cos x)}{۱-\cos^۲ x}$$

$$= \frac{\sin x(۱-\cos x)}{\sin^۲ x} = \frac{۱-\cos x}{\sin x} : \text{طرف راست}$$

گزینهٔ «۲»:

طرف چپ: $\sin^4 x - \sin^2 x = (1-\cos^2 x)^2 - (1-\cos^2 x)$

$= (1-2\cos^2 x+\cos^4 x) - (1-\cos^2 x)$

$= \cos^4 x - \cos^2 x$: طرف راست

گزینهٔ «۳»:

طرف چپ : $\frac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = (\frac{\sin x}{\cos x})^2 = \tan^2 x$

طرف راست : $(\frac{1+\tan x}{1+\cot x})^2 = (\frac{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}})^2 = (\frac{\sin x}{\cos x})^2 = \tan^2 x$

گزینهٔ «۴»:

طرف چپ: $\tan^2 x+\cot^2 x = (1+\tan^2 x)+(1+\cot^2 x)-2$

$= \frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}-2 = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

$= \frac{1-2(\sin x\cos x)^2}{\sin^2 x\cos^2 x}$: مخالف طرف راست

(صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶ کتاب درسی) (مثلثات)

۶۹-

«سجاد داوطلب»

ریشه‌های چهارم ۲۵۶ برابر هستند با:

ریشه‌های چهارم عدد ۲۵۶ $= \pm\sqrt[4]{256} = \pm\sqrt[4]{4^4} = \pm 4$

حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱» : ریشهٔ پنجم عدد ۵۱۲ $= \sqrt[5]{512} = \sqrt[5]{2^9} \neq \pm 4$

گزینهٔ «۲» : ریشه‌های دوم عدد ۳۶ $= \pm\sqrt{36} = \pm\sqrt{6^2} = \pm 6 \neq \pm 4$

گزینهٔ «۳» : ریشهٔ سوم عدد ۶۴- $= \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

گزینهٔ «۴» : ریشهٔ سوم عدد ۸ $= \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2 \neq \pm 4$

(صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳ کتاب درسی) (توان‌های گویا و عبارت‌های جبری)

۷۰-

«حسن نصرتی ناهوک»

مثال نقض برای گزینهٔ «۳»:

$\xrightarrow{8>1} \sqrt[3]{8} = 2 \ , \ 2<8$

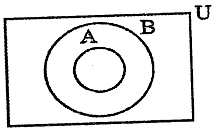
پس ریشهٔ سوم هر عدد بزرگ‌تر از یک، از خود آن عدد کوچک‌تر است.

(صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳ کتاب درسی) (توان‌های گویا و عبارت‌های جبری)

ریاضی (۱) - موازی

۷۱-

«حسن نصرتی ناهوک»



$A\subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A\cap B = A \\ A\cup B = B \end{cases}$

$\begin{cases} A\subseteq B \\ A \ \text{نامتناهی} \end{cases} \Rightarrow B$ نامتناهی

الف) $A-B = A-(A\cap B) = A-A = \varnothing$: متناهی

ب) $A\subseteq B \Rightarrow A\cup B = B$:نامتناهی

پ) $B\cap A' = B-A$: متناهی یا نامتناهی

ت) $(A\cup B)' = (B)' = B'$: متناهی یا نامتناهی

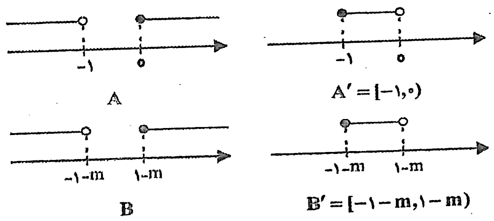
پس فقط یکی از مجموعه‌های داده شده قطعاً نامتناهی است.

(صفحه‌های ۵ تا ۱۰ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

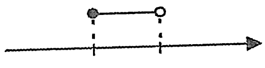
۷۲-

«مهرداد شاهی»

ابتدا به کمک نمایش هندسی مجموعه‌های A و B، متمم این دو مجموعه را به‌دست می‌آوریم:



از آن‌جایی که $A'\cap B' = [-1,0)$، بازهٔ A' زیرمجموعه بازهٔ B' است. یعنی:



$-1-m \le -1$ $\quad 0 \le 1-m$

$\begin{cases} -1-m \le -1 \\ 1-m \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le m \\ m \le 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 \le m \le 1$

(صفحه‌های ۳ تا ۵ و ۸ تا ۱۳ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

۷۳-

«سهیل حسن‌خان‌پور»

$\begin{cases} n(A\cup B) = n(U) = 9-(-8)+1 = 18 \\ n(A) = 12 \\ n(A\cap B) = 1 \end{cases}$

$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\Rightarrow 18 = 12+n(B)-1 \Rightarrow n(B) = 7$

$n(B') = n(U)-n(B) = 18-7 = 11$

(صفحه‌های ۸ تا ۱۳ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

-۷۴ «کیمیا شیرزاد»

در این کلاس، اگر A مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که در درس ریاضی قبول شده‌اند و B مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشد که در درس شیمی قبول شده‌اند، داریم:

$n(A\cap B)=10$

فقط در یکی از دو درس قبول‌شده‌اند: $n(A)+n(B)-2n(A\cap B)=20$

$n(A)+n(B)-2\times 10=20 \Rightarrow n(A)+n(B)=40$

$\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=40-10=30$

درهیچ‌کدام از دو درس قبول نشده‌اند: $n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=30$

تعداد دانش‌آموزان کلاس: $n(U)=n(A\cup B)+n((A\cup B)')$

$\Rightarrow n(U)=30+30=60$

(صفحه‌های ۸ تا ۱۳ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

-۷۵ «حسن نصرتی‌ناهوک»

جملهٔ عمومی الگوی خطی به‌صورت $c_n=an+b$ است که اختلاف هر دو جملهٔ متوالی همان ضریب n در c_n است، پس:

$a=-4\ ,\ c_{11}=-29 \Rightarrow -4(11)+b=-29$

$\Rightarrow b=-29+44=15 \Rightarrow c_n=-4n+15$

$c_n=-65 \Rightarrow -4n=-65-15=-80 \Rightarrow n=20$

(صفحه‌های ۱۶ و ۱۷ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

-۷۶ «کیمیا شیرزاد»

تعداد دایره‌ها در هر مرحله برابر است با:

مرحلهٔ (۱): $1+2^2 \Rightarrow 1+(1+1)^2$

مرحلهٔ (۲): $2+3^2 \Rightarrow 2+(2+1)^2$

مرحلهٔ (۳): $3+4^2 \Rightarrow 3+(3+1)^2$

$\vdots$

مرحلهٔ (n): $n+(n+1)^2$

مرحلهٔ (۹): $9+(9+1)^2=109$

(صفحه‌های ۱۴ تا ۲۰ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

-۷۷ «محمد بحیرایی»

اگر t_n جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی و d قدرنسبت دنباله باشد، داریم:

$t_1+t_2+t_3=3 \Rightarrow t_1+t_1+d+t_1+2d=3$

$\Rightarrow 3t_1+3d=3 \Rightarrow t_1+d=1 \Rightarrow t_1=1-d \quad (*)$

طبق فرض سؤال داریم:

$t_4=2/5\,t_3 \Rightarrow t_1+3d=\frac{5}{2}(t_1+2d)$

$\Rightarrow t_1+3d=\frac{5}{2}t_1+5d$

$\xrightarrow{(*)} 1-d+3d=\frac{5}{2}(1-d)+5d \Rightarrow 1+2d=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}d+5d$

$\Rightarrow -\frac{d}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow d=-3 \xrightarrow{(*)} t_1=4$

$t_{10}=t_1+9d=4-27=-23$

(صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

-۷۸ «محمد بحیرایی»

$$\begin{cases} t_4=24 \Rightarrow t_1r^3=24 \\ t_7=192 \Rightarrow t_1r^6=192 \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{t_7}{t_4}=\frac{t_1r^6}{t_1r^3}=\frac{192}{24} \Rightarrow r^3=8=2^3 \Rightarrow r=2$

$t_1r^3=24 \Rightarrow t_1\times 8=24 \Rightarrow t_1=3$

$t_n=t_1r^{n-1} \Rightarrow t_n=3\times 2^{n-1}$

(صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

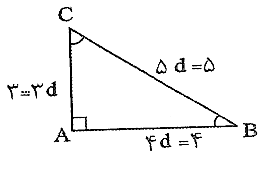
-۷۹ «حسن نصرتی‌ناهوک»

اضلاع مثلث قائم‌الزاویه که تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند را به‌صورت $a+d$ ، a ، $a-d$ در نظر می‌گیریم که با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$(a+d)^2=a^2+(a-d)^2 \Rightarrow a^2+2ad+d^2=a^2+a^2-2ad+d^2$

$\Rightarrow a^2-4ad=0 \Rightarrow a(a-4d)=0 \xrightarrow{a>0} a=4d$

پس وقتی اضلاع مثلث ABC تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند که طول اضلاع آن از کوچک به بزرگ $3d$، $4d$، $5d$ باشند، پس:



$S_{A\hat{B}C}=\frac{1}{2}(3d)(4d)=6d^2=6$

$\Rightarrow d^2=1 \Rightarrow d=1$

$\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{3}{5}\ ,\ \cos B=\frac{AB}{BC}=\frac{4}{5}$

$\tan C=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{3}$

مقدار عبارت $=\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{\frac{7}{5}}{\frac{4}{3}}=\frac{21}{20}$

توجه کنید اگر در رسم شکل جای دو رأس B و C عوض شود، جواب دیگر سؤال برابر با $\frac{28}{15}$ به‌دست می‌آید که در گزینه‌ها نیست.

(صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴ و ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی) (ترکیبی)

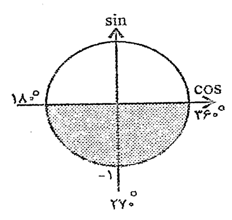
۸۰- «شکیب رجبی»

$$\frac{3\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cot 60^\circ\tan 30^\circ+\sin^2 45^\circ}=\frac{0}{\cot 60^\circ\tan 30^\circ+\sin^2 45^\circ}=0$$

$\Rightarrow \cot x=0\Rightarrow$ با توجه به گزینه‌ها، x می‌تواند 90° باشد.

(صفحه‌های ۲۹ تا ۳۹ کتاب درسی) (مثلثات)

۸۱- «سوند ولی‌زاده»



توجه کنید که مطابق دایرهٔ مثلثاتی فوق وقتی α در محدودهٔ $180^\circ<\alpha<360^\circ$ تغییر می‌کند، تصویر نقاط روی دایرهٔ مثلثاتی بر روی محور yها که همان $\sin\alpha$ است در محدودهٔ $[-1,0)$ تغییر می‌کند، یعنی $-1\le\sin\alpha<0$ است.

$$\xrightarrow{180^\circ<\alpha<360^\circ}-1\le\sin\alpha<0\Rightarrow -1\le-\frac{3m-2}{3}<0$$

$$\xrightarrow{\times 3}-3\le-3m+2<0\xrightarrow{-2}-5\le-3m<-2\Rightarrow\frac{2}{3}<m\le\frac{5}{3}$$

(صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹ کتاب درسی) (مثلثات)

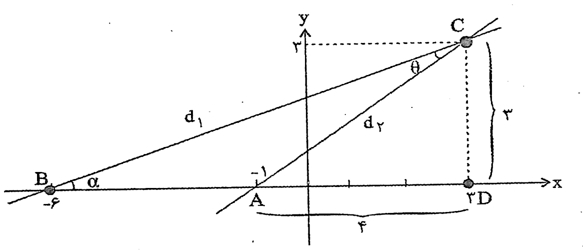
۸۲- «شکیب رجبی»

چون $\sin^2\alpha\ge 0$ و $\sin^2\alpha\cos\alpha<0$ است، پس $\cos\alpha$ منفی است. در نتیجه انتهای کمان α در ناحیهٔ دوم یا سوم مثلثاتی قرار دارد.

همچنین چون $\cos\alpha\tan\alpha<0$ است، یعنی $\cos\alpha$ و $\tan\alpha$ مختلف‌العلامت هستند، یعنی انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم یا چهارم مثلثاتی است. از اشتراک شرط‌های به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی است.

(صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹ کتاب درسی) (مثلثات)

۸۳- «وهاب نادری»



$AC^2=AD^2+DC^2$

$\Rightarrow AC^2=16+9\Rightarrow AC^2=25\Rightarrow AC=5$

$AB=|-6-(-1)|=5$

$AB=AC$ است، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

$\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}\Rightarrow\theta=\alpha\Rightarrow\tan\theta=\tan\alpha$

شیب خط d_1 برابر با $\tan\alpha$ است، پس $\tan\theta$ نیز برابر با شیب خط d_1 است.

(صفحه‌های ۴۰ و ۴۱ کتاب درسی) (مثلثات)

۸۴- «سوند ولی‌زاده»

طبق نتیجهٔ تمرین ۶ کار در کلاس صفحهٔ ۹ کتاب درسی، داریم:

$A'-B'=A'\cap B=B\cap A'=B-A=\{8\}$

$A\cap B'=A-B=\{1,4\}$

$\xrightarrow{U}(B-A)\cup(A-B)=\{1,4,8\}$

(صفحه‌های ۸ تا ۱۰ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

۸۵- «محمد بحیرایی»

چون هر سال ده درصد قیمت سال قبل به قیمت کالا اضافه می‌شود، بنابراین یک دنبالهٔ هندسی داریم که قدرنسبت آن برابر است با:

$r=1+0/1=1/1$

$t_1=5\quad,\quad t_n=t_1\times r^{n-1}$

سال ۹۸ جملهٔ چهارم دنبالهٔ هندسی است:

$t_4=t_1\times r^3\Rightarrow t_4=5\times(1/1)^3=6/655$ هزار تومان

$\Rightarrow 6/655\times 1000=6655$ تومان

(صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

-۸۶
«علی ارجمند»

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی را به‌صورت $t_n = t_۱ r^{n-۱}$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} t_۴+t_۶ = t_۱r^۳+t_۱r^۵ \\ t_{۱۰}+t_{۱۲} = t_۱r^۹+t_۱r^{۱۱} = r^۶(t_۱r^۳+t_۱r^۵)\end{cases}$$

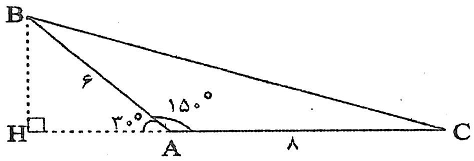
$$\Rightarrow r^۶ = \frac{t_{۱۰}+t_{۱۲}}{t_۴+t_۶} = \frac{۹۰}{۱۸} = ۵$$

$$t_{۱۶}+t_{۱۸} = t_۱r^{۱۵}+t_۱r^{۱۷} = r^۶(t_۱r^۹+t_۱r^{۱۱}) = ۵\times ۹۰ = ۴۵۰$$

(صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷ کتاب درسی) (مجموعه، الگو و دنباله)

-۸۷
«محمد بحیرایی»

راه حل اول :



$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{BH}{۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow BH = ۳$$

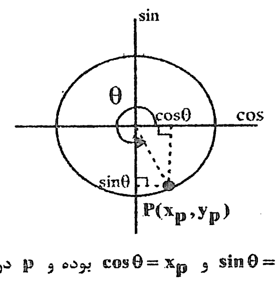
$$S_{A\hat{B}C} = \frac{۱}{۲}\times BH\times AC = \frac{۱}{۲}\times ۳\times ۸ = ۱۲$$

راه حل دوم: در سال یازدهم خواهید خواند که اگر مجموع دو زاویه برابر با ۱۸۰° باشد، sin آن‌ها با هم برابر است. پس $\sin ۱۵۰^\circ = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ است که با جایگذاری در رابطهٔ مساحت مثلث یعنی $S = \frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin ۱۵۰^\circ$ به جواب $S = ۱۲$ می‌رسیم.

(صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی) (مثلثات)

-۸۸
«علی ارجمند»

مطابق شکل زیر نقطهٔ P را روی دایرهٔ مثلثاتی در نظر می‌گیریم:



از آن‌جایی که $\cos\theta = x_p$ و $\sin\theta = y_p$ بوده و p در ربع چهارم است، آن‌گاه $x_p > ۰$ و $y_p < ۰$ و خواهیم داشت:

$$\tan\theta = \frac{y_p}{x_p} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow x_p = -۳y_p \quad (۱)$$

$$x_p^۲ + y_p^۲ = ۱ \xrightarrow{(۱)} ۹y_p^۲ + y_p^۲ = ۱ \Rightarrow y_p^۲ = \frac{۱}{۱۰}$$

$$\xrightarrow{y_p<۰} y_p = \sin\theta = -\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

$$\xrightarrow{(۱)} x_p = \cos\theta = \frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰} \text{ , } \cot\theta = \frac{x_p}{y_p} = -۳$$

$$\sin\theta + \cos\theta\cot\theta = -\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰} + \frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}\times(-۳) = -\frac{۱۰\sqrt{۱۰}}{۱۰} = -\sqrt{۱۰}$$

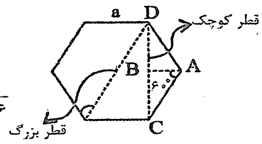
(صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹ کتاب درسی) (مثلثات)

-۸۹
«سجاد راوطلب»

شش ضلعی منتظم به ضلع a از شش مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = ۶\times\frac{۱}{۲}\times a\times a\times \sin ۶۰^\circ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

$$S = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۶ \Rightarrow a = \sqrt{۶}$$



با استفاده از تقارن داریم:

$$DC = ۲BC = ۲AC\sin ۶۰^\circ = ۲\sqrt{۶}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

نکته: در شش ضلعی منتظم به‌طول ضلع a داریم:

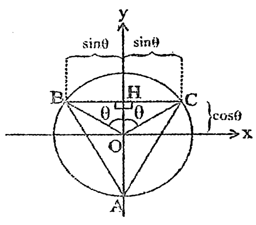
الف) طول قطر کوچک آن $a\sqrt{۳}$ است.

ب) طول قطر بزرگ آن $۲a$ است.

ج) مساحت آن $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ است.

(صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵ کتاب درسی) (مثلثات)

-۹۰
«مهرداد قابی»



$$OH = OC\times\cos\theta = ۱\times\cos\theta = \cos\theta$$

$$\frac{S_{O\hat{B}C}}{S_{A\hat{B}C}} = \frac{\frac{۱}{۲}(OH\times BC)}{\frac{۱}{۲}(AH\times BC)} = \frac{OH}{AH} = \frac{OH}{OA+OH} = \frac{\cos\theta}{۱+\cos\theta}$$

(صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹ کتاب درسی) (مثلثات)